UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
S.I.L.S.I.S. - SEZIONE DI BERGAMO E BRESCIA

Corso di
Storia ed epistemologia della matematica
Prof. Lucio Benaglia

Le origini delle coniche: da Euclide ad Apollonio

Specializzando:

Stefano Adriani

Matricola 56152

Relatore:

prof. Lucio Benaglia

Anno Accademico 2006 – 2007

Introduzione

Lo studio delle coniche è uno dei più antichi della matematica. Esso rappresenta da sempre un argomento centrale, sia dal punto di vista applicativo che dal punto di vista didattico, poiché le coniche abbracciano tutte e tre i grandi rami della matematica: la Geometria, l'Algebra e l'Analisi.

In Geometria possono essere affrontate su diversi livelli, iniziando con gli approcci più semplici, quali l'apprendimento delle "forme" caratteristiche della parabola, del cerchio, dell'ellisse e dell'iperbole, tipico della scuola secondaria di primo grado, per finire con l'approccio formale ed elegante della geometria proiettiva, dove le diverse coniche manifestano il loro carattere unitario, suggerendo che si tratta sempre e comunque dello stesso oggetto, visto di volta in volta da un "punto di vista" diverso. Apparentemente le coniche sembrano aver poco a che fare con l'Algebra moderna, eppure la maggior parte degli studenti delle scuole secondarie associa il concetto di "parabola" a quello di "polinomio di secondo grado". Perciò, anche se l'algebra astratta si occupa dello studio delle strutture, le coniche permettono comunque agli studenti di familiarizzarsi con gli strumenti dell'algebra classica. Infine, nel caso dell'Analisi, la conoscenza delle coniche è uno strumento indispensabile per discutere le prime proprietà delle funzioni matematiche. Esse diventano poi fondamentali quando si affronta l'insegnamento della geometria analitica, poiché rappresentano i primi esempi "concreti" di traduzione del linguaggio analitico in quello geometrico.

E' chiaro quindi che le coniche sono tra gli argomenti più ricorrenti nello studio della matematica. Con il nostro lavoro intendiamo illustrarne le origini storiche, soffermandoci in particolare sui seguenti aspetti:

- *Coerenza matematica*: vedremo come il procedimento di Apollonio, che permette di dedurre tutte le coniche, offra un'interpretazione puramente geometrica delle curve prese in esame. Ci occuperemo perciò di mostrare come il lavoro di Apollonio sia coerente con la trattazione moderna delle coniche.

- *Discussione etimologica*: per quanto si tratti di oggetti familiari, non sempre è noto il motivo per cui tali curve sono state chiamate "parabola" o "iperbole". Per giustificare l'etimologia di questi termini andremo a rileggere il libro sesto degli Elementi di Euclide, dove "tutto ebbe inizio".

Il libro sesto di Euclide

Gli elementi di Euclide

I tredici libri di Euclide, raccolti col nome di Elementi, sono una rielaborazione e una riorganizzazione del sapere del periodo classico prealessandrino. Infatti, sebbene Euclide sia vissuto ad Alessandria attorno al 300 a.C., negli Elementi egli sintetizza il sapere matematico delle epoche precedenti, quindi l'opera può essere collocata in una fase transitoria tra il periodo classico e quello ellenistico (o alessandrino). Euclide ordina i concetti partendo dai più semplici e giungendo ai più complessi, in ottemperanza all'ideale dell'*arché* (identificare il principio delle cose). Oltre al merito di aver riorganizzato le conoscenze in un'unica opera organica e completa, ad Euclide sono attribuiti anche molti contributi personali agli Elementi. In particolare, per quanto riguarda l'argomento di nostro interesse (le sezioni coniche), poniamo l'attenzione sui libri quinto e sesto degli Elementi, nei quali Euclide espone e utilizza la teoria di Eudosso di Cnido[1].

Il libro quinto

Nel libro quinto Euclide discute la **teoria delle proporzioni**, attribuita ad Eudosso, nella quale egli riesce a "maneggiare" il concetto di *rapporto tra grandezze* senza usare i numeri irrazionali, riferendosi solamente alle proporzioni tra grandezze. In tal modo egli discute molte delle proprietà dei rapporti tra grandezze, senza curarsi del fatto che tale rapporto corrisponda o meno ad un numero razionale. Così facendo Euclide aggira l'ostacolo delle *grandezze incommensurabili*, esponendo una teoria che corrisponde "sincreticamente" al concetto di "sezione di Dedekind".

A noi interessa osservare che, mentre nei primi quattro libri Euclide discute la geometria piana evitando tutti i casi che riguardano le grandezze incommensurabili, nel libro quinto egli affronta alcuni problemi relativi al rapporto tra superfici, che in termini moderni corrispondono alla trattazione delle equazioni di secondo grado, e quindi alle sezioni coniche.

Viene spontaneo domandarsi, allora, perché Euclide affronti la teoria delle proporzioni solamente nel libro sesto. Si ritiene che Euclide volesse "rinviare quanto possibile una trattazione che, per essere logicamente ineccepibile, presentava tuttavia innegabili difficoltà per il lettore" [1]. Oppure, si può pensare ad "esigenze di purismo geometrico, dato che la teoria del libro quinto si riferisce a grandezze in generale, e non esclusivamente a grandezze geometriche: le applicazioni alla geometria si trovano poi esposte nel libro sesto" [1].

In ogni caso, osserviamo una certa reticenza da parte di Euclide nell'avvalersi dei risultati del libro quinto. Per chiarire quest'ultima affermazione, discutiamo una particolare proposizione del libro sesto che ci servirà successivamente per comprendere meglio l'origine della teoria di Apollonio sulle sezioni coniche.

---

[1] Eudosso di Cnido, vissuto nel IV° secolo a.C., contemporaneo di Platone.

Il libro sesto

Utilizzando la teoria delle proporzioni, nel libro sesto Euclide tratta, oltre all'uguaglianza di superficie, anche l'uguaglianza di forma, cioè la **similitudine**. Quest'approccio permette ad Euclide di estendere ai parallelogrammi, o più in generale ai poligoni, alcune delle proprietà già discusse nei primi quattro libri degli Elementi. Ad esempio, nel libro sesto Euclide riformula problemi come la costruzione delle *sezione aurea* di un segmento (trovare la sezione x di a tale che $x^2 = a(a - x)$), in termini di proporzioni (trovare la media ragione x di una "retta" a tale che $a : x = x : (a-x)$).

Così facendo Euclide affronta alcuni problemi che possono essere interpretati come la trattazione geometrica delle equazioni di secondo grado, e questo ci rimanda allo studio delle sezioni coniche. In particolare, per quanto riguarda l'analisi etimologica dei termini "ellisse", "iperbole" e "parabola", ci interessa la **proposizione 27**:

"Di tutti i parallelogrammi applicati [costruiti su una parte] *alla stessa retta* [segmento] *e deficienti di figure parallelogrammiche* [i parallelogrammi costruiti sulla parte restante] *simili e similmente situate* [cioè simili] *rispetto al parallelogramma descritto su metà della retta, ha area maggiore quel parallelogramma che è applicato a metà della retta e che è simile al difetto."* [2]

La proposizione descrive la seguente situazione: si considera il segmento AB ed il parallelogramma "di riferimento" $ADEC$, con AC pari alla metà di AB. Per *difetto* di tale figura Euclide intende la figura costruita sulla parte rimanente del segmento AB, ovvero il parallelogramma $CEFB$ (vedasi figura 1.1). Quindi $CEFB$ è il *difetto* della figura $ADEC$. La proposizione afferma che, se consideriamo tutti i parallelogrammi aventi per base una frazione di AB, e tali che il loro difetto sia simile al parallelogramma $CEFB$, allora il parallelogramma di base AC è il maggiore fra tutti questi.

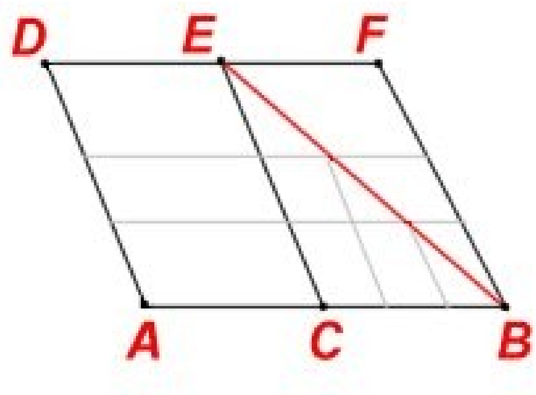
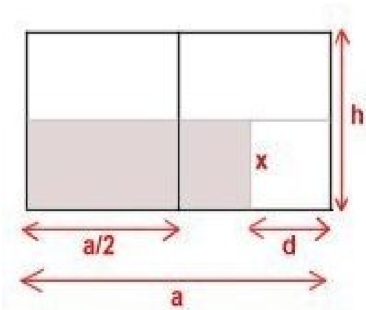


Figura 1.1



Sia ora a la lunghezza del segmento AB e consideriamo il rettangolo[1] tratteggiato in figura, costruito in modo tale che il suo difetto (di lati x e d) sia simile al rettangolo di base $a/2$ e altezza h. Si ha quindi $h : a/2 = x : d$, da cui $d = ax/2h$. Allora la superficie S del rettangolo evidenziato in grigio vale

$$S = ax\,(1 - x/2h) \Rightarrow \qquad a{\cdot}x^2 - 2ah{\cdot}x + 2Sh = 0$$

[1] Consideriamo un rettangolo anziché un parallelogramma perché, come vedremo in seguito, Apollonio applica la proposizione 27 a dei rettangoli costruiti sul piano della sezione conica.

La proposizione 27 può essere letta come segue: fra tutti i rettangoli di area S costruiti col procedimento indicato, quello di area massima si ottiene quando $x = h$ e $d = a/2$, per cui la superficie S è limita dalla relazione $S \leq S_{max} = ah/2$. Ma se calcoliamo il discriminante dell'equazione (I), vediamo che essa ammette soluzioni se e solo se:

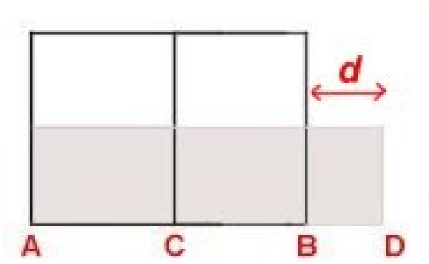
$$\Delta = 4ah \cdot (ah - 2S) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad S \leq ah/2$$

Perciò nella proposizione 27 Euclide descrive, in termini geometrici, le condizioni per cui un'equazione di secondo grado ammette soluzioni. La **proposizione 28** infatti recita:

"A una retta data applicare un parallelogramma uguale [equivalente] *ad una figura rettilinea* [di area *S*] *e deficiente di una figura parallelogrammica simile ad una figura data* [di base *AC*]. *Così* [per la proposizione 27] *la figura rettilinea data* [cioè *S*] *deve essere non maggiore del parallelogramma descritto sulla metà della retta, e simile al difetto."* [2]

Questo perché in tal modo ci ritroviamo nel caso della proposizione 27, e quindi l'equazione ammette soluzioni come già visto. Da questo punto di vista, l'altezza x rappresenta perciò la soluzione grafica dell'equazione (I).

Infine, nella **proposizione 29** Euclide discute il caso complementare, ovvero la costruzione di una figura avente come base un prolungamento di *AB*, il cui "eccesso" (di base *BD*) sia simile al parallelogramma (o rettangolo) di riferimento (di base *AC*). In tal caso l'area della figura tratteggiata S è determinata dalla (vale ancora $d = ax / 2h$)



(II) $\quad a \cdot x^2 + 2ah \cdot x - 2Sh = 0$

Figura 1.3

Si può verificare che la (II) ammette soluzione per qualsiasi valore di *S*.

E' interessante osservare che il parallelogramma *S* costruito per difetto (prop. 28) era chiamato da Euclide "**elleipsis**", mentre il parallelogramma *S* costruito per eccesso (prop. 29) era detto "**hyperbolè**". Infine, il parallelogramma di base *AB*, e quindi costruito "ugualmente" su tutto il segmento *AB*, era detto "**parabolè**". Questi termini vennero poi ripresi da Apollonio nello studio sulle sezioni coniche, da cui derivarono appunto i nomi delle curve analitiche di secondo grado.

Detto ciò possiamo finalmente entrare nel vivo della nostra discussione, ovvero illustrando le origini storiche dello studio delle coniche.

Le sezioni coniche

Menecmo

I matematici prima di Euclide, Euclide stesso e quelli successivi (Archimede), trattarono le coniche così com'erano state definite da Menecmo, uno studioso della scuola platonica. Menecmo considera le coniche come sezioni di coni opportuni [3], usando un cono diverso per ogni tipo di conica. Si ritiene che ciò *non* sia dovuto al fatto che Euclide, Menecmo e Archimede ignorassero la possibilità di ottenere tutte le coniche da uno stesso cono[1], bensì alla volontà di semplificare il problema scegliendo di volta in volta un cono sezionato da un piano perpendicolare all'ipotenusa del triangolo assiale[2]. Apollonio quindi fu il primo a riuscire nell'impresa, dimostrando un'abilità talmente straordinaria da meritarsi l'appellativo "Il Grande Geometra".

Osserviamo infine che i termini ellisse, iperbole e parabola non erano presenti nella trattazione originale di Menecmo, ma furono introdotti successivamente dai copisti, proprio in riferimento al lavoro di Apollonio.

Apollonio

Le "Sezioni Coniche" di Apollonio (262 – 190 a.C. circa) consistevano di otto libri, di cui sette ci sono pervenuti nella forma pressoché originaria, mentre l'ultimo è stato ricostruito da Halley basandosi sulle indicazioni di Pappo, durante il XVII° secolo. Vediamo in breve quali sono i punti salienti del procedimento indicato da Apollonio per costruire le diverse sezioni coniche (vedasi la figura 2.1 come esempio):

1. Si considera un piano σ che sezioni il cono (definendo così la conica) e la retta s definita dall'intersezione del piano σ col piano che contiene la base del cono. Dopodiché si traccia il piano α contenente il triangolo assiale, e la retta p definita dall'intersezione tra il piano α e quello su cui giace la base del cono.
2. Si traccia la retta m, definita dall'intersezione dei piani α e σ. Tale retta interseca la conica in due punti che chiamiamo P_1 e P_2.
3. Si considera una corda Q_1Q_2 e il vertice V individuato dall'intersezione della corda con la retta m. Infine si traccia la retta t, parallela ad m e passante per il vertice A del cono: tale retta interseca il piano della base in un punto che chiamiamo N.

Per dedurre l'equazione della conica Apollonio ricorre ad altri due punti, che chiamiamo L ed R, la cui posizione dipende dal tipo di conica in esame. Vedremo come costruire quest'ultima coppia di punti caso per caso, considerando separatamente il caso dell'ellisse, dell'iperbole e infine della parabola.

---

[1] Sappiamo per certo che Euclide ed Archimede erano a conoscenza del fatto che le sezioni *oblique* (i.e. quelle che attraversano tutte le generatrici) di un cono erano delle *ellissi*.

[2] Il triangolo assiale ha per base il diametro del cerchio base del cono e per vertice il vertice del cono.

L'ellisse

Nel caso dell'ellisse Apollonio sceglie un punto L sulla retta q (definita da $q \subseteq \sigma$ e $q \perp m$) in modo da soddisfare l'equazione (vedasi figura 2.1)

$$\frac{P_1L}{P_1P_2} = \frac{BN \cdot NC}{AN^2}$$

Dove i punti P_1, P_2, A ed N sono definiti come abbiamo visto sopra, mentre i punti B e C individuano la base del triangolo assiale, che coincide con il diametro della base del cono stesso. Apollonio afferma che se il punto L soddisfa l'equazione data, allora la sezione conica descrive un'ellisse. Dopodiché egli considera la retta $r \subseteq \sigma$ passante per il vertice V e parallela a q, e definisce il punto R ottenuto dall'intersezione $P_2L \cap r$ (vedasi figura 2.2). Infine Apollonio dimostra che l'espressione scritta sopra corrisponde alla

(III) $\qquad Q_1V^2 = P_1V \cdot VR$

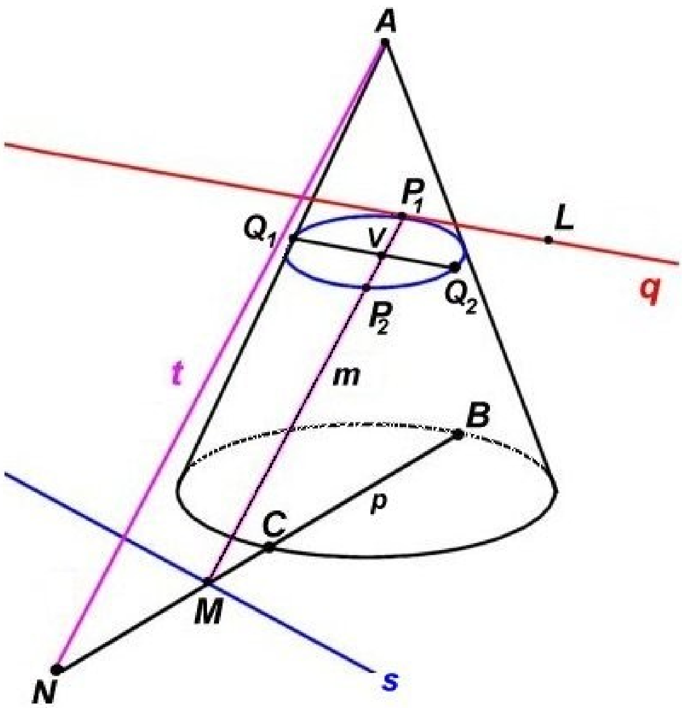
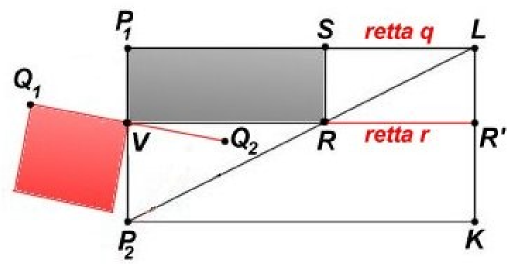


Figura 2.1 – Punti caratteristici dell'ellisse

Dove Apollonio chiama il segmento Q_1V *ordinata della conica*, per cui poniamo $y = Q_1V$. Vogliamo adesso riscrivere l'equazione (III) in una forma più familiare. Per motivi di leggibilità grafica, consideriamo solamente le figure collocate sul piano σ, ottenendo così la figura 2.2.

L'equazione (III) afferma che la sezione conica rappresenta la curva di un'ellisse quando l'area sottesa dal rettangolo P_1SRV (S è definito come il corrispondente del punto R) è uguale alla superficie del quadrato costruito sul segmento Q_1V. Se indichiamo con $2p$ la lunghezza del segmento P_1L (che Apollonio chiama *latus rectum*) possiamo scrivere



$$VR = 2p - LS$$

Figura 2.2

Sia adesso w la lunghezza del segmento P_1V (misurata a partire dal punto P_1). Poiché il rettangolo $SLR'R$ è simile al rettangolo P_1LKP_2, se d è la lunghezza del diametro P_1P_2 della conica vale la proporzione

$$LS : 2p = w : d \qquad \Rightarrow \qquad LS = (2pw) / d$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione di VR otteniamo $VR = 2p \cdot (1 - w/d)$, per cui possiamo riscrivere la (III) come segue

(IV) $$y^2 = P_1V \cdot VR = w \cdot 2p \cdot (1 - w/d) = 2pw \cdot (1 - w/d)$$

Per semplificare il procedimento consideriamo adesso il caso di un cono circolare retto, perché in tal caso si vede facilmente che vale

$$m \perp s \qquad \text{e} \qquad q \,//\, Q_1Q_2$$

Essendo in tal caso la corda Q_1Q_2 parallela alla retta q, l'ordinata $y = Q_1V$ diventa una coordinata retta (altrimenti saremmo costretti a lavorare in un sistema di coordinate oblique[1]) e otteniamo la situazione di figura 2.3. Per descrivere la conica nelle coordinate tradizionali x,y (che rappresentano le coordinate del punto Q_1) procediamo come segue: consideriamo un sistema cartesiano ruotato di 90°, avente per origine il centro O dell'ellisse, il cui asse delle x coincide con la retta passante per P_1P_2.

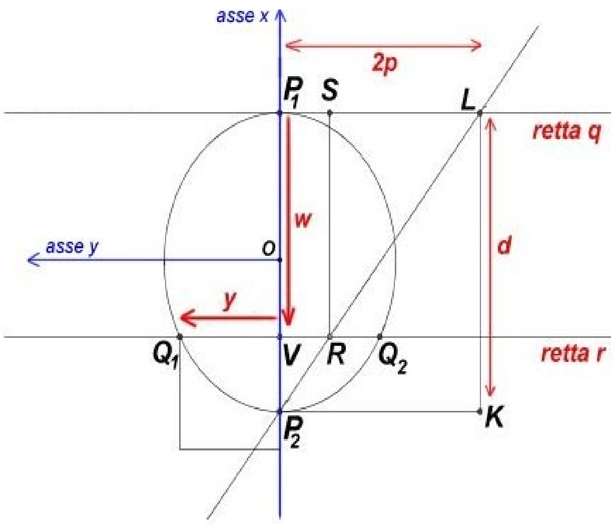


Figura 2.3

[1] L'espressione (III) di Apollonio rappresenta la conica in un sistema di coordinate oblique, avente come origine il punto P_1.

L'asse delle y allora può essere identificato con la perpendicolare all'asse x passante per il centro O della conica. Se indichiamo con a, b i semiassi (al momento incogniti) dell'ellisse avremo $w = a - x$, con $a = d/2$, per cui la (IV) diventa:

$$y^2 = p/2d \cdot (d^2 - 4x^2)$$

sviluppando la moltiplicazione e portando il termine x^2 a sinistra otteniamo

$$\textbf{(V)} \qquad \frac{x^2}{(d/2)^2} + \frac{y^2}{pd/2} = 1$$

che rappresenta un'ellisse incentrata sull'origine O e avente semiassi

$$a = d/2 \qquad\qquad b = (pd/2)^{1/2}$$

Abbiamo così concluso il procedimento che trasforma l'espressione (III), formulata da Apollonio, all'equazione analitica "tradizionale" dell'ellisse. Prima di passare all'iperbole, ricordiamo che Apollonio non fa uso di algebra nel suo procedimento, per cui l'espressione (III) va interpretata esclusivamente come un rapporto tra aree geometriche.

Dopo aver dimostrato la corrispondenza tra la descrizione di Apollonio e quella tradizionale, possiamo finalmente discutere l'etimologia della parola *ellisse*, dovuta al linguaggio utilizzato da Euclide nei suoi *Elementi*. Come abbiamo visto sopra, la proposizione 27 del libro sesto descrive le equazioni di secondo grado in termini di rapporti tra le superfici di parallelogrammi simili. Dalla figura 2.2 notiamo che il caso dell'ellisse ricade esattamente nella situazione della proposizione 27, in quanto il rettangolo $SLR'R$ è simile al rettangolo P_1LKP_2, e che risulta:

$$Area\ (P_1SRV) < Area\ (P_1LR'V)$$

dove Euclide denota il rettangolo P_1SRV con il nome di "**elleipsis**", in quanto risulta "deficiente" di una parte rispetto al rettangolo di riferimento, cioè $P_1LR'V$. Quindi è proprio in virtù della proposizione 27 del libro sesto se in questo caso si parla di "ellisse".

L'iperbole

Nel caso dell'iperbole si sceglie un punto L sulla retta q tale da soddisfare la stessa equazione dell'ellisse, ovvero

$$\frac{P_1L}{P_1P_2} = \frac{BN \cdot NC}{AN^2}$$

La differenza è che adesso il punto P_2 si trova sull'altra falda del cono (quella superiore). Infatti, essendo esso definito come l'intersezione della retta m con la sezione conica, la retta che unisce P_2 ed L (indicata con u) "scende" dalla falda superiore verso il piano della base, come illustrato in figura 3.1.

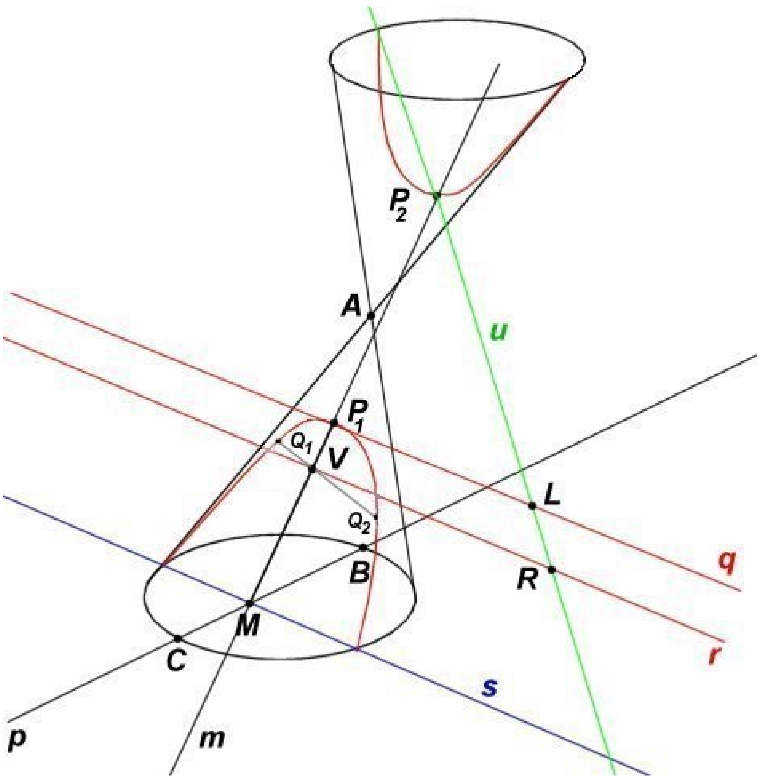


Figura 3.1: Punti caratteristici dell'iperbole

La retta q rimane definita come nel caso precedente, ovvero $q \subseteq \sigma$ e $q \perp m$. Il punto R si trova come abbiamo già fatto per l'ellisse, tracciando la retta r passante per il vertice V e parallela a q, e determinando la sua intersezione con la retta u. Anche in questo caso Apollonio dimostra che vale:

(VI) $$Q_1V^2 = P_1V \cdot VR$$

Esattamente come nel caso dell'ellisse (vedasi equazione III a pagina 8).

Possiamo perciò ripetere i passaggi eseguiti per l'elissi, con l'accortezza che adesso il segmento VR si ottiene come $P_1L + LS$, mentre prima era $P_1L - LS$ (vedasi figure 2.3 e 3.2). Il risultato perciò è lo stesso dell'ellisse, ma con un cambiamento di segno (vedasi IV a pagina 9).

(VII) $\quad Q_1V^2 = P_1V \cdot VR = 2pw \cdot (1+ w/d)$

Come nel caso dell'ellisse, considerando un cono rettangolare la situazione diventa molto più semplice: in tal caso le rette r, q ed s sono parallele, e siccome la retta m passa per il triangolo assiale, ne segue che il diametro P_1P_2 taglia l'iperbole esattamente in due parti uguali, come indicato in figura 3.3. In questa situazione semplificata il triangolo P_1P_2L è isoscele, per cui abbiamo

$$P_1P_2 = d = P_1L = 2p$$

La (VII) diventa perciò

$$Q_1V^2 = w\cdot(d + w) = dw + w^2$$

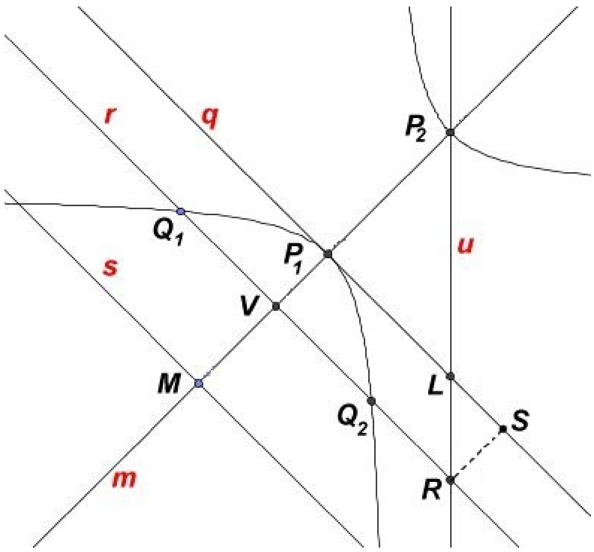


Figura 3.2

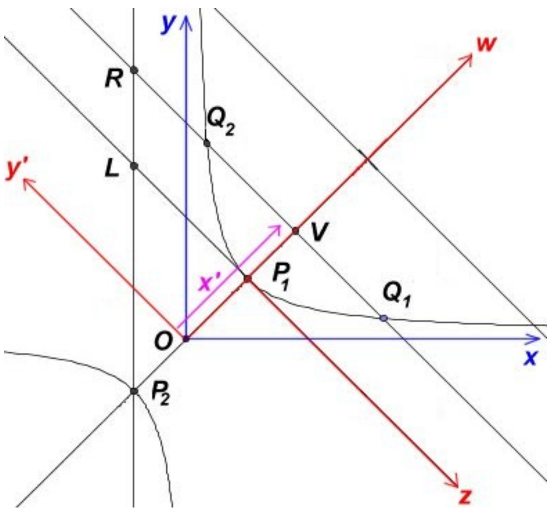


Figura 3.3

Allo scopo di trasformare quest'ultima espressione in quella dell'iperbole tradizionale, ruotiamo la figura 3.2 di 180° e operiamo un cambio di coordinate. Dopo la rotazione il punto Q_1 viene a trovarsi sul "ramo" discendente dell'iperbole, ed è espresso dalle coordinate (vedasi figura 3.3)

$$Q_1 = (w, z)$$

dove abbiamo posto $w = P_1V$, $z = Q_1V$. In altre parole, Apollonio utilizza il sistema di riferimento w,z incentrato sul punto P_1 .

Trasliamo adesso l'origine degli assi lungo la direzione w, scegliendo O come punto medio di P_1P_2, per cui $x' = d/2 + w$ (ricordiamo $d = P_1P_2$). Se poniamo $z = Q_1V$ la (VII) diventa

$$Q_1V^2 = z^2 = (x' - d/2)\cdot (x' - d/2) = (2x' - d)/2 \cdot (2x' + d)/2 = (x')^2 - d^2/4$$

L'ultima espressione descrive la conica nel sistema di coordinate *(x', z)*. A questo punto dobbiamo passare dalle coordinate *(x', z)* alle *(x', y')*, e poi ruotare il sistema *(x', y')* per passare al sistema *(x, y)*. Dobbiamo quindi compiere due trasformazioni lineari del piano: prima passiamo dall'ordinata *z* alla *y'* mediante una riflessione dell'asse *z*, dopodiché ruotiamo gli assi di 45° per passare nel sistema di riferimento cartesiano "tradizionale". Componendo assieme le due trasformazioni, espresse in forma matriciale, otteniamo la matrice

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}$$

da cui otteniamo le relazioni tra i due sistemi di riferimento (centrati entrambi in *O*)

$$x' = \cos\theta \cdot x + \mathrm{sen}\theta \cdot y = \sqrt{2}/2 \cdot x + \sqrt{2}/2 \cdot y$$
$$z = \mathrm{sen}\theta \cdot x - \cos\theta \cdot y = \sqrt{2}/2 \cdot x - \sqrt{2}/2 \cdot y$$

sostituendo nell' espressione $z^2 = (x')^2 - d^2/4$ otteniamo

(VIII) $$y = \frac{d^2}{8x}$$

che rappresenta l'equazione dell'iperbole nella forma che ci è familiare.

Avendo così dimostrato che la sezione conica descritta dall'equazione (VI) è un'iperbole, osserviamo adesso la figura 3.4. Anche in questo caso, com'era per l'ellisse, rientriamo nella situazione descritta dalle proposizioni 27, 28 e 29 del libro sesto degli Elementi. Ma in questo caso il rettangolo P_1SRV risulta *maggiore* del rettangolo "di riferimento" $P_1LR'V$, per cui Euclide denota tale rettangolo col nome di "**hyperbole**".

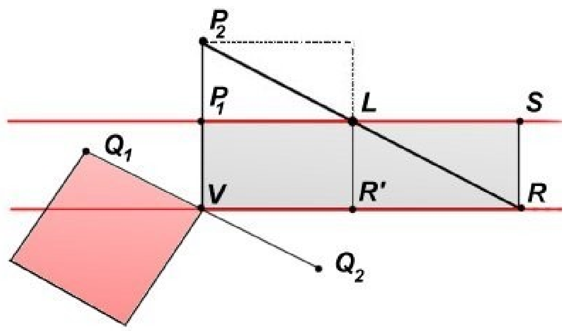


Figura 3.4

La parabola

Nel caso della parabola si sceglie un punto L sulla retta q tale da soddisfare un'equazione diversa da quella dell'ellisse e dell'iperbole

$$\frac{P_1L}{P_1A} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC}$$

Osserviamo che per la parabola non esiste alcun punto P_2, in quanto la sezione conica si sviluppa solamente su una delle due falde del cono. Partendo dell'equazione caratteristica della parabola, Apollonio dimostra che vale:

(IX) $Q_1V^2 = P_1V \cdot P_1L$

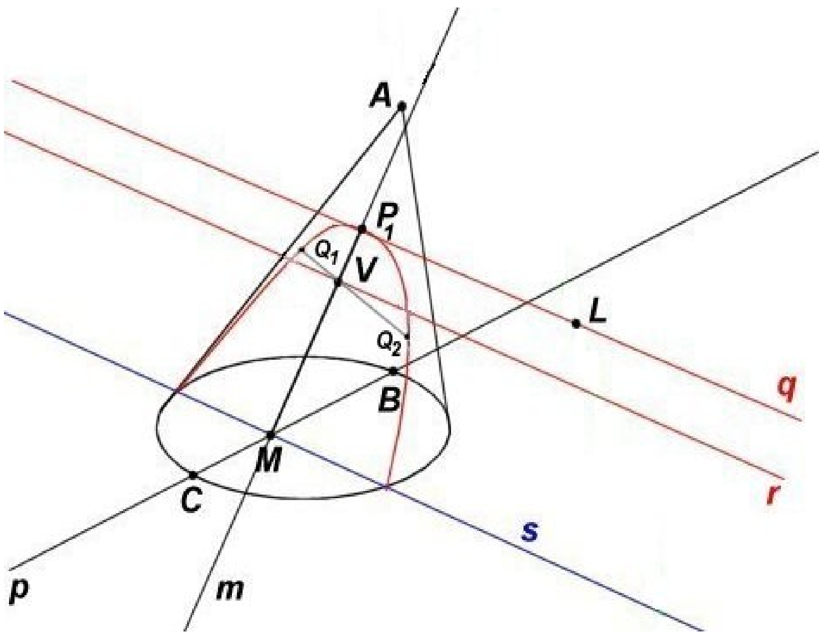


Figura 4.1: Punti caratteristici della parabola

La retta q rimane definita come nel caso precedente, quindi $q \subseteq \sigma$ e $q \perp m$, ma non viene introdotto alcun punto R: infatti l'equazione (IX) tiene conto solamente dei punti Q_1, V, P_1 ed L, dato che R non è definito. Ci limitiamo a disegnare, per coerenza con i casi precedenti, il punto R' corrispondente al punto L, esattamente come fatto per l'ellisse e l'iperbole.

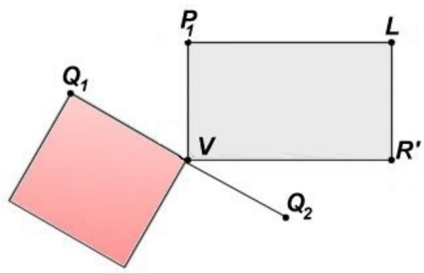


Figura 4.2

In questo caso l'equivalenza tra superfici piane risulta molto semplice, come illustrato in figura 4.2: infatti l'espressione (IX) afferma che l'area del quadrato costruito sul lato Q_1V è uguale a quella del rettangolo $P_1LR'V$. Se adesso poniamo $y = Q_1V$, $2p = P_1L$ e $w = P_1V$ (come nei casi precedenti) la (IX) diventa

$$y^2 = P_1V \cdot PL = w \cdot 2p = 2pw$$

ovvero

(X) $$w = (1/2p) \cdot y^2$$

Che rappresenta la parabola di figura 4.3, descritta nel sistema di riferimento avente come origine il punto P_1, come "ascissa" la variabile y e come "ordinata" la grandezza w. Abbiamo perciò verificato, anche in questo caso, che l'espressione (IX) usata da Apollonio descrive la parabola così come la conosciamo.

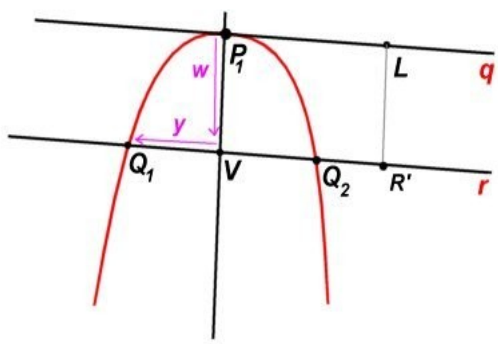


Figura 4.3

Osserviamo infine che l'espressione (X) si poteva ottenere dall'equazione dell'ellisse e dell'iperbole facendo tendere d all'infinito. Da ciò segue un'importante generalizzazione delle sezioni coniche: *l'ellisse e l'iperbole sono due casi distinti e separati, mentre la parabola può essere interpretata come il caso "limite" dei due, ovvero come la figura di transizione o "separatrice".*

L'idea di pensare alla parabola come all'"anello mancante" tra ellisse ed iperbole è confermata dall'analisi etimologica che abbiamo dedotto dal libro sesto di Euclide. Infatti, nel caso della parabola, Apollonio discute solamente il rettangolo $P_1LR'V$, poiché esso coincide con il rettangolo "di riferimento" P_1SRV . In particolare, quando i due rettangoli sono uguali, nella proposizioni 27, 28 e 29 del libro sesto Euclide usa il termine "**parabole**". Ciò conferma che possiamo interpretare la parabola come il "punto di transizione" tra le varie situazioni trattate nella proposizioni del libro sesto.

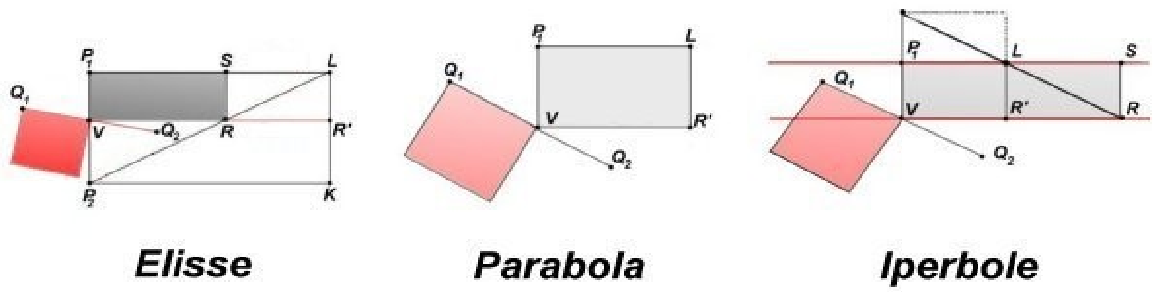


Figura 4.4: La Parabola intesa "punto di transizione" tra Ellisse ed Iperbole

Conclusioni

Abbiamo visto come l'etimologia delle sezioni coniche derivi dalla terminologia introdotta da Euclide nel libro sesto degli Elementi. In particolare, andando ad indagare la dimostrazione originaria di Euclide (proposizione VI, 27) si osserva come egli stesso si appoggi sulla diagonale di un parallelogramma (la diagonale *EB* di figura 1.1) per giustificare la propria tesi. Lo stesso fa Apollonio per costruire il punto *L* che caratterizza, e quindi distingue, le diverse sezioni coniche: ellisse, iperbole e parabola. Ne possiamo concludere che il "punto cruciale" dell'intero argomento, ovvero l'elemento discriminante capace di conferire una diversa *apparenza* ad ogni sezione conica, sta proprio nell'ubicazione precisa del punto *L* di Apollonio, che da solo riesce a fare da "parametro separatore" delle curve studiate.

Abbiamo anche visto come l'approccio di Apollonio sia risultato innovativo nella storia del pensiero matematico, poiché ha permesso di trattare le sezioni coniche operando su un unico cono, impresa che era sfuggita ad Euclide e ai suoi predecessori. Se dovessimo spiegare il motivo di tale fallimento, potremmo azzardare che forse è stato proprio a causa del suo amore per la geometria "tradizionale", lontana dalla discussione di tutto ciò che rappresentavano le grandezze incommensurabili, che Euclide non ha voluto approfondire le applicazioni delle proposizioni presentate nel libro sesto. Ciò potrebbe essere dovuto, oltre ai motivi già menzionati, ad una sorta di ”forza d'inerzia, o in omaggio ad una vera e propria tradizione che ormai si era andata formando" [1]. In altri termini, Euclide potrebbe aver scelto coscientemente di prediligere la geometria pura, priva di trattazioni numeriche, tralasciando così i problemi correlati alle coniche.

Riteniamo quindi che il lavoro di Apollonio, oltre ad essere interessante per la generalità della trattazione e per la discussione etimologica che abbiamo esposto, potrebbe essere anche interpretato come un esempio eclatante di "rivoluzione del pensiero", che mostra come uno studioso più smaliziato (Apollonio) possa spingersi più in là del suo stesso maestro (Euclide), non perché più abile o dotato di una migliore "cassetta degli attrezzi", ma solamente perché meno attaccato agli ideali della tradizione accademica.

Dopotutto, questa è la storia di ogni rivoluzione del pensiero umano.

Bibliografia

[1] A. Frajese e L. Maccioni (1970), *Gli elementi di Euclide*, UTET, Torino.

[2] Morris Kline (1999), *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino.

[3] Lucio Benaglia (2006-07), *Appunti delle lezioni del corso di "Storia ed epistemologia della matematica" presso la SILSIS di Bergamo*, a cura di Stefano Adriani.