# Il principio di Landauer

## Indice generale

# Premessa

Il principio di Landauer impone che sia impossibile cancellare informazione in modo "pulito", cioè senza che ciò comporti un consumo di energia, rilascio di calore o un aumento dell'entropia dell'universo. In particolare, il principio di Landauer è cruciale per risolvere al dilemma del diavoletto di Maxwell, nonché valutare l'efficienza di un motore di Szlizard.

# Il principio di Landauer

Nell'ambito della termodinamica computazionale il principio di Landauer è utilizzato per stimare il costo di cancellazione dell'informazione, indipendentemente dal supporto fisico in questione. In particolare il principio impone in seguito alla cancellazione di **un singolo bit** di informazione l'entropia totale aumenti almeno della quantità:

$$\Delta S \geq k_B \cdot \ln(2)$$

Un modo di spiegare il fenomeno consiste nel confrontare i processi termodinamici con quelli computazionali. In termodinamica solo i processi reversibili sono in grado di lasciare inalterata l'entropia, mentre i processi irreversibili causano sempre un aumento dell'entropia. Poiché l'entropia è un caso particolare di informazione, è possibile che ciò valga anche per i processi computazionali, ovvero: se un processo computazionale è irreversibile, allora ha senso aspettarsi un aumento di entropia. Ma cosa si intende per **processo computazionale irreversibile**?

La reversibilità computazionale riguarda gli aspetti **logici** del processo anziché quelli fisici. Per capire la differenza supponiamo di lavorare con un foglio di carta: se scriviamo un numero di 100 cifre con una matita, il sistema passa dallo stato A (foglio bianco) allo stato B (foglio scritto). Questo processo è logicamente reversibile, perché possiamo cancellare il foglio e tornare nello stato A iniziale. Dopo la cancellazione il foglio sarà leggermente diverso (carta consumata, tracce di matita, cellulosa un po' più calda ecc.) per cui il suo stato fisico è cambiato. Questo è un caso in cui il processo di scrittura $A \rightarrow B$ è **reversibile** dal punto di vista *logico* (possiamo ripristinare il foglio bianco) nonostante sia irreversibile dal punto di vista fisico (il foglio non tornerà mai identifico a prima). Ciò suggerisce che il processo di memorizzazione dell'informazione sia un processo *logicamente reversibile*.

Il contrario però non è vero. Se partiamo dal foglio nello stato B (foglio scritto), allora il processo di cancellazione B → A è **irreversibile** anche dal punto di vista logico. Infatti, siccome stiamo parlando di sistemi isolati (cioè non ha senso ipotizzare di avere una copia dell'informazione) nel processo B → A l'informazione associata alle 100 cifre viene persa. Ma se l'informazione è irrimediabilmente perduta allora non è possibile tornare allo stato iniziale B (foglio scritto), perché non sapremmo cosa scriverci. Ne segue che il processo di cancellazione dell'informazione è un processo *logicamente irreversibile*.

Il principio di Landauer può essere interpretato come un'estensione del II° principio della termodinamica. Ricordiamo infatti che quest'ultimo è esprimibile in molti modi:

- **Enunciato di Clausius**: è impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia far passare del calore da una sorgente fredda ad una calda
- **Enunciato di Kelvin**: è impossibile costruire una macchina termica ciclica il cui unico risultato sia la trasformazione di calore in una uguale quantità di lavoro
- **Enunciato classico**: l'entropia di un sistema isolato aumenta sempre ($\Delta S \geq 0$), dove l'uguaglianza si ottiene solo per processi reversibili (non dissipativi)

E' facile dimostrare che questi enunciati sono equivalenti alla formulazione "debole" (nel senso di semplificata) del principio di Landauer:

- **Enunciato di Landauer**: è impossibile realizzare una qualsiasi trasformazione il cui unico risultato sia la cancellazione di informazione

Spesso il principio di Landauer viene formulato dicendo che la cancellazione di informazione richiede una certa energia (o un rilascio di calore). A rigore questi sono casi particolari, perché il principio impone solo che ci sia un costo *di qualche tipo*, che potrebbe essere un aumento di entropia, un surriscaldamento o qualsiasi altra cosa.

# Dimostrazione

Per dimostrare il principio di Landauer daremo per assodati i concetti di gradi di libertà, spazio delle fasi ed evoluzione hamiltoniana. Per una breve introduzione a questi argomenti rimandiamo agli appunti in bibliografia [1].

## Eidostati

Quando un sistema evolve sotto una certa hamiltoniana, il suo stato all'istante *t* è identificato da un vettore **S**(t) nello spazio delle fasi. Se il sistema contiene gradi di libertà discreti, come ad esempio il valore di uno o più bit, alcune coordinate dello spazio delle fasi sono rappresentate da numeri interi (detti parametri *coarse-grained*). Ne segue che il vettore di stato avrà alcune coordinate reali, altre intere, ovvero: l'informazione è un ulteriore **grado di libertà** del sistema.

In particolare, se un dispositivo in grado di memorizzare 1 bit di informazione è composto da N elettroni, aventi tutti la stessa hamiltioniana, è possibile rappresentare lo stato di tutti gli elettroni nello stesso spazio delle fasi (tecnica degli ensemble). Allora, se il dispositivo sta memorizzando il valore 1 bit, significa che un certo numero M di elettroni (M ≤ N) nello spazio delle fasi rappresenta un microstato compatibile con il macrostato "valore 1". Infatti il dispositivo potrebbe assumere il macrostato "1" in modi differenti, ad esempio collocando gli elettroni in posizione leggermente diversa. A questo punto – poiché nello spazio delle fasi un macrostato è rappresentato dall'insieme di M punti – si applica il teorema di Liouville per affermare che il volume dell'insieme dei punti M si conserva durante l'evoluzione del sistema

**Durante l'evoluzione di M sistemi conservativi descritti dalla stessa hamiltoniana, il volume del macrostato da essi identificato nello spazio delle fasi è costante**

A questo punto dobbiamo però chiarire il *significato* di macrostato. In termodinamica un macrostato è identificato da variabili macroscopiche, quali ad esempio pressione, volume, temperatura. Ma come tenere conto dell'*informazione* associata ad un macrostato?

*Esempio*: Laura fa produrre 100 ampolle di profumo come bomboniera per il suo matrimonio, tutte dotate di etichetta, e su ogni etichetta scrive il nome di un invitato. L'azienda regala a Laura un campione supplementare, sulla cui etichetta è scritto "extra". Immaginiamo ora le 101 ampolle tutte nello stesso macrostato (pressione, massa, temperatura, ecc.). Se prima del matrimonio Laura apre l'ampolla con la scritta "extra" (per farla annusare alle amiche) è come se l'informazione scritta sull'ampolla avesse fatto evolvere quel sistema in modo diverso dagli altri. Si potrebbe allora pensare che l'informazione scritta sull'etichetta faccia parte del macrostato.

E' però improponibile cercare di descrivere il contenuto di un'etichetta in termini degli atomi di inchiostro che lo costituiscono e dare significato fisico a tale configurazione. Piuttosto si preferisce introdurre il concetto di **eidostato**, definito come il macrostato **più** tutta l'informazione disponibile sul sistema (su qualsiasi scala essa sia: macroscopica o microscopica) che è in grado di condizionare l'evoluzione del sistema. In altre parole il concetto di eidostato *estende* quello di macrostato. Si definisce perciò la coppia ordinata:

**Eidostato $\alpha$** = (macrostato A, tutta l'informazione sul sistema)

dove informazione di cui si parla ha **natura fisica**, ovvero deve essere "scritta" da qualche parte: su un foglio di carta, un hard-disk o nella memoria di un essere senziente.

In particolare, si dice che due eidostati sono *distinti* se essi non si sovrappongono nello stato delle fasi. Perciò, quando si considera lo spazio delle fasi completo (coordinate classiche **y**, più coordinate discrete **x**), sistemi nello stesso macrostato *y* ma caratterizzati da valori di informazione *x* diversa sono di fatto eidostati *distinti* (vedi macrostato A, figura 1, destra).

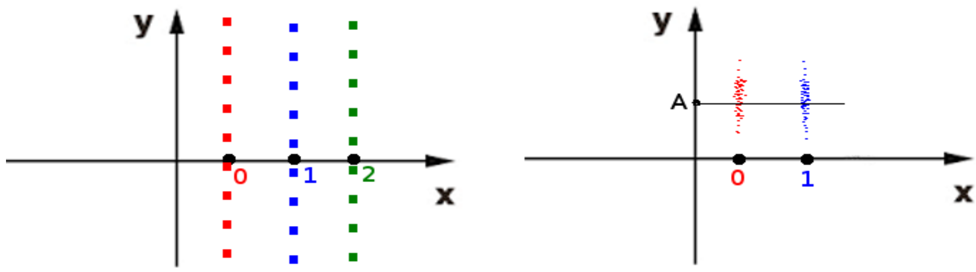


*Figura 1: spazio delle fasi con variabili discrete (sinistra) e eidostati distinti (destra)*

*Esempio*: se una cella di memoria (in grado di memorizzare 1 bit) sta memorizzando il valore 0, diciamo che il dispositivo è nel macrostato 0. Se però sappiamo che un istante prima il sistema era in uno stato diverso, allora nel presente si hanno tre eidostati possibili: (0, "prima era 0"), (0, "prima era 1") e (0,"non so cosa c'era scritto prima").

Poiché l'informazione associata ad un sistema è un ulteriore grado di libertà, lo spazio delle fasi in cui applicare il teorema di Liouville è costituito dalle coordinate hamiltioniane più le coordinate di natura discreta associate all'informazione. Ne segue che il teorema di Liouville può essere generalizzato come segue:

**Durante l'evoluzione di M sistemi conservativi descritti dalla stessa hamiltoniana, il volume dell'eidostato da essi identificato nello spazio delle fasi è costante**

## Fusione di eidostati

Vediamo adesso come il teorema di Liouville imponga dei vincoli all'evoluzione degli eidostati. Se indichiamo con $V(\alpha)$ il **volume** dell'eidostato $\alpha$ nello spazio delle fasi, allora il processo in cui due eidostati $\alpha$, $\beta$ evolvono entrambi nell'eidostato $\gamma$ si scrive come:

$\alpha + \beta \rightarrow \gamma$ (due eidostati distinti $\alpha$, $\beta$ evolvono nell'eidostato $\gamma$)

per il teorema di Liouville, tale processo è permesso solo se:

**(I)** $V(\gamma) = V(\alpha) + V(\beta)$

ovvero se il volume dell'eidostato $\gamma$ è grande abbastanza da accogliere i volumi di $\alpha$ e $\beta$.

*Esempio*: supponiamo di avere 100 dispositivi di memorizzazione, ciascuno in grado di memorizzare 1 bit di informazione usando M elettroni. Allora nello spazio delle fasi avremo 100·M punti che rappresentano lo stato degli elettroni di tutti i dispositivi (figura 2, sinistra). Se metà dei dispositivi memorizza il valore 1 e l'altra metà memorizza il valore 0, possiamo chiamare $\alpha$ l'insieme dei 50·M punti associati al valore 1, e $\beta$ l'insieme dei 50·M punti associati al valore 0. Se eseguiamo la stessa operazione su tutti e 100 i dispositivi, portandoli tutti nello stato $\gamma$, abbiamo applicato il processo $\alpha + \beta \rightarrow \gamma$. In questo caso, per il teorema di Liouville, il volume $V(\gamma)$ deve essere grande abbastanza da accogliere entrambi i volumi $V(\alpha)$ e $V(\beta)$.

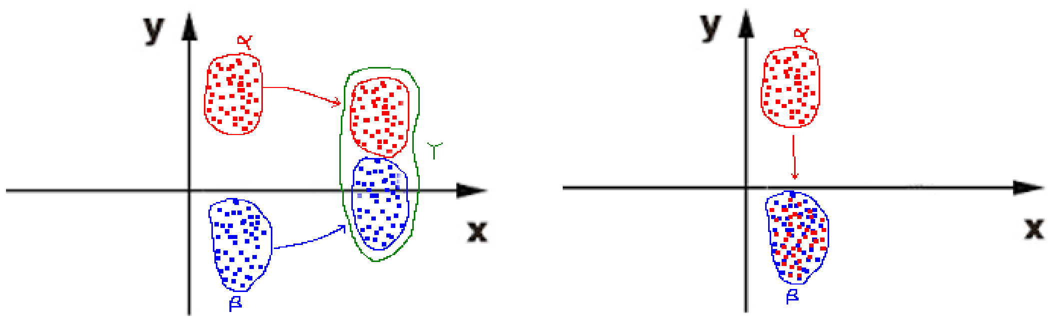


*Figura 2: convoluzione degli eidostati α, β in γ (sinistra) e in β stesso (destra)*

Da questo esempio si intuisce che un processo del tipo $\alpha + \beta \rightarrow \beta$ (esempio: tutti i sistemi vengono resettati al valore 0) non è compatibile col teorema di Liouville, perché o aumenta la densità dei punti (figura 2, destra) oppure dovrebbe aumentare il volume di $\beta$ stesso, ovvero si dovrebbe cambiare la definizione dell'eidostato $\beta$.

In particolare, la I ci dice che per il processo $\alpha + \beta \rightarrow \gamma$ deve essere $V(\gamma) > V(\alpha)$, e questo basta a suggerire che il processo inverso non sia possibile, ovvero:

$$\gamma \rightarrow \alpha$$

perché essendo $V(\gamma) > V(\alpha)$, il volume non sarebbe conservato durante tale processo.

**Nota**: a rigore è sufficiente chiedere che durante il processo $\alpha + \beta \rightarrow \gamma$ sia $V(\gamma) \geq V(\alpha) + V(\beta)$, perché se il volume di $\gamma$ è maggiore, gli eidostati $\alpha,\beta$ riescono comunque a "trovare spazio" in esso senza sovrapporsi. Per non complicare troppo la trattazione, qui usiamo il simbolo di uguaglianza.

## Bennet e Landauer

Dimostriamo ora in modo formale l'impossibilità del processo inverso $\gamma \rightarrow \alpha$ di figura 2. Consideriamo un sistema nell'eidostato iniziale (S,I), dove S è il macrostato, I è l'informazione (che ricordiamo avere rappresentazione fisica). Allora, mediante la computazione reversibile è teoricamente possibile realizzare entrambi i seguenti processi:

$(S_1,I_1) \rightarrow (S_{\mathbf{2}},I_2)$ (cambiano sia l'informazione, sia il macrostato)

$(S_1,I_1) \rightarrow (S_{\mathbf{1}},I_2)$ (cambia l'informazione, ma il macrostato resta invariato)

*Esempio*: quando scriviamo nella RAM di un normale calcolatore si ha un processo del tipo $(S_1,I_1) \rightarrow (S_2,I_2)$, perché a fine processo è stata alterata sia la memoria RAM ($I_1 \neq I_2$), sia le altre variabili macroscopiche (batteria meno carica, computer un po' più caldo ecc.). Se eseguiamo la stessa operazione tramite un computer reversibile è invece possibile ottenere il processo $(S_1,I_1) \rightarrow (S_1,I_2)$, ovvero: solo alterazione dell'informazione, senza variazioni macroscopiche.

Questo ci dice che è teoricamente possibile un processo del tipo (computazione reversibile):

$(S,I_1) \rightarrow (S,I_2)$ (cambia solo l'informazione, il macrostato resta invariato)

Consideriamo ora due dispositivi che memorizzano un diverso bit di informazione (valore 1 nel primo dispositivo, valore 0 nel secondo) e supponiamo di farli evolvere entrambi nello **stesso eidostato $\gamma$ = (S,0)**, definito come l'eidostato che forza il bit di informazione al valore 0. Siccome ci interessa il caso generale, supponiamo $S_1 \neq S_2$ :

$\alpha = (S_1,1) \rightarrow (S,0)$ (evoluzione del 1° dispositivo dall'eidostato α all'eidostato γ)

$\beta = (S_2,0) \rightarrow (S,0)$ (evoluzione del 2° dispositivo dall'eidostato β all'eidostato γ)

dove il macrostato S è lo stesso per ipotesi. Siccome questo processo è logicamente irreversibile, non deve essere possibile tornare indietro dall'eidostato γ agli eidostati iniziali. Sappiamo però che è possibile realizzare il processo "inverso" $(S,0) \rightarrow (S,1)$, quindi non può essere $S = S_1$ (altrimenti sarebbe possibile tornare indietro da γ ad α) da cui si deduce che $S \neq S_1$. Analogamente, deve essere anche $S \neq S_2$. Quindi, quando i due eidostati α,β si "fondono" nell'eidostato γ, il nuovo macrostato S deve essere diverso sia da $S_1$ che da $S_2$:

**Quando eidostati distinti si fondono nello stesso eidostato,**
**il macrostato risultante deve essere diverso da tutti i macrostati iniziali**

A questo punto basta osservare che "cancellare" informazione significa scrivere lo stesso valore in tutti i bit del dispositivo (cioè forzarli tutti a 0 oppure tutti ad 1), e quindi farli evolvere tutti nello stesso eidostato. Ne segue che il processo di cancellazione deve cambiare anche il macrostato del sistema, da cui la formulazione debole del principio di Landauer:

**E' impossibile realizzare una qualsiasi trasformazione**
**il cui unico risultato sia la cancellazione di informazione**

**Nota**: si potrebbe obiettare che per cancellare dell'informazione basta "trascurare" il dispositivo di memorizzazione, ad esempio gettando un hard-disk nel fuoco, avvicinandolo ad un magnete o esponendolo a raggi cosmici. Questi processi sono però diversi dalla cancellazione. Infatti gettare un hard-disk nel fuoco significa distruggerlo, non cancellarlo.

Analogamente, esporlo ai raggi cosmici implica scrivere dei valori casuali, che è ben diverso dalla cancellazione. Per *cancellazione* si intende il processo che rende **uniforme** i valori di tutti i bit, ad esempio ponendoli tutti pari a 0, oppure tutti pari ad 1. Solo in questo modo il dispositivo viene resettato ed è nuovamente utilizzabile. Infatti, se dopo la presunta "cancellazione" il dispositivo contenesse dei valori casuali, non sarebbe possibile memorizzare alcuna informazione in esso, perché non potremmo distinguere i dati da noi scritti da quelli lasciati come "immondizia".

# Conclusioni

Come abbiamo visto, il teorema di Liouville afferma che un'evoluzione hamiltoniana che non conserva il volume degli eidostati è “impossibile”. Ma la parola “impossibile” in questo contesto significa solamente che il teorema non può essere applicato al processo. Siccome il teorema di Liouville richiede che la funzione hamiltioniana sia conservativa, dire che un processo è “impossibile” secondo Liuoville implica che l'hamiltioniana non sia conservativa, cioè che il processo sia dissipativo. Questo è il motivo per cui la formulazione debole del principio di Landauer è sufficiente per affermare che la cancellazione di informazione è un processo dissipativo.

Chiariamo che il principio di Landauer del 1961 afferma solo che le operazioni logicamente irreversibili sono le uniche ad essere obbligatoriamente *termodinamicamente* irreversibili. Ma ciò non implica che la **cancellazione** di informazione sia l'unica operazione *logicamente* irreversibile. Nel 1982 Bennet mostrò (come visto nel capitolo precedente) che solamente la cancellazione di informazione implica sempre un cambiamento di macrostato, per cui essa è l'unica operazione logica ad essere *sempre* termodinamicamente irreversibile, e quindi *sempre* dissipativa. Al contrario, a seconda della tecnologia a disposizione, il processo di scrittura *potrebbe* essere conservativo, e quindi reversibile.

Ad esempio, i computer e cellulari odierni **non** sfruttano la computazione reversibile, per cui dissipano energia anche nelle operazioni di scrittura. Il risultato di Bennet non afferma che la cancellazione sia sempre dissipativa o che la scrittura sia sempre conservativa, ma solamente che nessuna tecnologia potrà mai cancellare informazione mediante un processo che sia termodinamicamente reversibile (e quindi non dissipativo).

Ecco perché ha senso investire nella ricerca della computazione reversibile: in teoria è fisicamente possibile realizzare un dispositivo in grado di memorizzare informazione senza sprecare energia, ovvero senza dissipare calore, con gli evidenti benefici ambientali ed economici.

# Bibliografia

[1] Stefano Adriani, *Il Teorema di Louville*, 2022
http://adriani.altervista.org/author/notes.php

[2] Benefits, *The Science Information about Erasure Cost and Reversible Computing*, 2020
https://www.youtube.com/watch?v=FJ0DqQde3p0&t=1402s

[3] David Wolpert, *The Landauer limit and thermodynamics of biological computation*, 2015
https://www.youtube.com/watch?v=9_TMMKeNxO0&t=462s

[4] Ben Schumacher, *Landauer's principle, fluctuations & the second law,* 2013
https://www.youtube.com/watch?v=ppFhkVZuYyc&t=1307s